1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y + (m+1)z = 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 1 \\ 2x + my + z = -1 \end{cases}$.

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

Solución

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 0 & m-2 & 1-m \\ 0 & m-2 & -1-2m \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = +(1)(\ (m-2)(-1-2m) - (m-2)(1-m)\ ) - 0 + 0 =$

$= (m-2)\cdot(-1-2m+m-1) = (m-2)\cdot(-m-2)$.

De $|A| = 0$, $(m-2)\cdot(-m-2)$, de donde $m = -2$ y $m = 2$.

Si $m \neq -2$ y $m \neq 2$, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si m = -2, tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = +(1)(-12-4) - 0 + 0 = -16 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si m = 2, tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{matrix} = +(1)(5-5) - 0 + 0 = 0$, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución, en nuestro caso infinitas.**

2.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) (1 punto) Calcule, si es posible $(A\cdot B^t)^{-1}$.

(b) (1 punto) Compruebe que $C^3 = I$, donde I es la matriz identidad y calcule C^{16}.

Solución

(a)

Calcule, si es posible $(A\cdot B^t)^{-1}$.

Existe D^{-1} si $\det(D) = |D| \neq 0$.

Sea D = $A\cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $|D| = 0-4 = -4 \neq 0$ existe $D^{-1} = \dfrac{1}{|D|}\cdot Adj(D^t)$.

$|D| = -4,\ D^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix};\ Adj(D^t) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};\ D^{-1} = \dfrac{1}{|D|}\cdot Adj(D^t) = \dfrac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$.

(b)

Compruebe que $C^3 = \mathbf{I}$, donde **I** es la matriz identidad y calcule C^{16}.

$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ C^3 = C^2\cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2$.

$C^{16} = (C^3)^5\cdot C = (I_2)^5\cdot C = I_2\cdot C = C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.- Resuelva el sistema matricial $\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix}\ (E_2-2E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 7Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ de donde } Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos $X = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4.- Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

(a) (1,25 puntos) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto (0,0,1).
(b) (0,75 puntos) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores **u**, **v** y **uxv**. Sabiendo que **uxv** = (-1, 1, 1), calcule el volumen de dicho paralelepípedo

Solución

(a)

Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto (0,0,1).

El haz de planos que contiene a la recta r es: (x + z - 1) + m(2x + y - 3) = 0. Como el punto (0, 0, 1) pertenece al plano $\rightarrow$ (0) + (1) - 1 + m(2(0) + (0) - 3) = 0 $\rightarrow$ 0 - 3m = 0, de donde m = 0 y el plano pedido **x + z -1 = 0.**

(b)

Se considera el paralelepípedo definido por los vectores **u**, **v** y **uxv**. Sabiendo que **uxv** = (-1, 1, 1), calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

Sabemos que el volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan con un origen común.

También recordamos que el **producto mixto** de tres vectores, que se escribe [**u**,**v**,**w**], como el **número** que resulta de realizar el producto escalar del primer vector **u** por el vector producto vectorial de los otros dos **v**x**w**, es decir [**u**,**v**,**w**] = **u**•(**v**x**w**).

En nuestro caso [**u**, **v**, **u**x**v**] = - [**u**, **u**x**v, v**] = -(-[**u**x**v, u, v**])) = [**u**x**v, u, v**] = (**u**x**v)•(v**x**w**) =
= (-1, 1, 1)•(-1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 = 3.

Volumen = | [**u**, **v**, **w**] | **= | 3 | u^3 = 3 u^3.**

5.- Calcule el siguiente límite $\lim_{x\to 0+}\left(1+x-\text{sen}(x)\right)^{1/x^3}$.

Solución

$\lim_{x\to 0+}\left(1+x-\text{sen}(x)\right)^{1/x^3} = \left(1+0-\text{sen}(0)\right)^{\frac{1}{0+}} = (1)^{\infty}$. Indeterminación del número "e".

Recordamos la regla de L'Hôpital (L'H), que nos dice que si "f" y "g" son funciones continuas en $[a-\delta, a+\delta]$, derivables en $(a-\delta, a+\delta)$, verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si $x\to\infty$)

$$\lim_{x\to 0+}\left(1+x-\text{sen}(x)\right)^{1/x^3} = e^{\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x^3}\right)\cdot(1+x-\text{sen}(x)-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\text{sen}(x)}{x^3}\right)} = e^{\left\{\frac{0}{0},\ L'H\right\}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{3x^2}\right)} = e^{\left\{\frac{0}{0},\ L'H\right\}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}(x)}{6x}\right)} =$$

$$= e^{\left\{\frac{0}{0},\ L'H\right\}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{6}\right)} = e^{\left(\frac{\cos(0)}{6}\right)} = e^{1/6}.$$

6.- Se considera la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.

Solución

Sabemos que la regla de L'Hôpital (L'H) dice: Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La regla se puede repetir y también para $\frac{\infty}{\infty}$, y cuando $x\to\infty$.

Para que una función f(x) tenga una asíntota vertical en x = b se tiene que verificar que $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$.

Como $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-e^{-x}} = \left\{\frac{0}{1-e^0} = \frac{0}{0};\ L'H\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{-x}} = \frac{0}{e^0} = 0$, **f(x) no tiene asíntotas verticales**.

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{+\infty}{1-\frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty$, **f(x) no tiene asíntota horizontal en +∞**.

Como $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{+\infty}{1-\frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty$, **f(x) no tiene asíntota oblícua en +∞**.

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-e^x} = \left\{\frac{+\infty}{1-\infty} = \frac{+\infty}{-\infty};\ L'H\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{-e^x} = \left\{\frac{+\infty}{-\infty} = \frac{+\infty}{-\infty};\ L'H\right\} =$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{-e^x} = \frac{2}{-\infty} = 0$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal en -∞, luego f(x) no tiene asíntota oblicua en -∞.**

7.- Se considera la siguiente función: f(x) = ln(2x + 1).
(a) (1,25 puntos) Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento
(b) (0,75 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa x = 1/2.

Solución

(a)

Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

Sabemos que ln sólo existe para números positivos, luego 2x + 1 > 0, de donde x > - 1/2. **El dominio es el intervalo (-1/2, +∞).**

Nos piden la monotonía, que es el estudio de f '(x).

$f(x) = \ln(2x+1);\ f'(x) = \frac{2}{2x+1}$.

De f '(x) = 0, tenemos 2 = 0, lo cual es absurdo y f **no tiene extremos relativos** siendo siempre estrictamente creciente o decreciente.

Como $f'(1) = \frac{2}{3} > 0$, Como f '(0) = (+)·1 > 0, **f es estrictamente creciente** (Z) **en (-1/2, +∞).**

(b)
Halle la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa x = 1/2.

La recta tangente a f(x) en x = 1/2 es: y – f(1/2) = f '(1/2)·(x – 1/2)

Tenemos f(1/2) = ln(2(1/2) + 1) = ln(2); $f'(1/2) = \frac{2}{2(1/2)+1} = \frac{2}{2} = 1$.

La recta tangente pedida es y – ln(2) = 1·(x – 1/2) ó y = x + ln(2) -1/2.

8.- Calcule la siguiente integral: $\int\left(\sqrt{x}\cdot\ln^2(x)\right)dx$

Solución

$$I = \int\sqrt{x}\cdot\ln^2(x)dx = \left\{\begin{array}{l} u = \ln^2(x) \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{2\cdot\ln(x)dx}{x} \\ dv = \sqrt{x}dx = x^{1/2}dx \;\Rightarrow\; v = \int x^{1/2}dx = \dfrac{x^{3/2}}{3/2} = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} \end{array}\right\} = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\ln^2(x) - \int\frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\frac{2\cdot\ln(x)dx}{x} =$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\ln^2(x) - \frac{4}{3}\cdot\int\sqrt{x}\cdot\ln(x).dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\ln^2(x) - \frac{4}{3}\cdot I_1 = \{**\}$$

$$I_1 = \int\sqrt{x}\cdot\ln(x)dx = \left\{\begin{array}{l} u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \sqrt{x}dx = x^{1/2}dx \Rightarrow v = \int x^{1/2}dx = \dfrac{x^{3/2}}{3/2} = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} \end{array}\right\} = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\ln(x) - \int\frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\ln(x) - \frac{2}{3}\int\sqrt{x}dx =$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\ln(x) - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x\sqrt{x}}{3} = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\ln(x) - \frac{4}{9}\cdot x\sqrt{x}$$

Luego

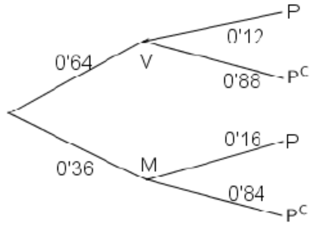
$$I = \{**\} = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\ln^2(x) - \frac{4}{3}\cdot I_1 = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\ln^2(x) - \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\ln(x) - \frac{4}{9}\cdot x\sqrt{x}\right) + K = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\cdot\left(\ln^2(x) - \frac{4}{3}\ln(x) + \frac{8}{9}\right) + K$$

9.- Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%.
a) (0,75 puntos) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?
b) (0,75 puntos) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?
c) (0,5 puntos) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar
Solución
a)
Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?

Llamemos V, M, P, y P^C, a los sucesos siguientes, "ser varón", "ser mujer", "estar en el paro" y "no estar en el paro", respectivamente.

Datos del problema: p(V) = 64% = 0'64; p(M) = 36% = 0'36; p(P/V) = 12% = 0'12; p(P/M) = 16% = 0'16, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(ser mujer y estar en el paro) = p(M2) =** p(M).p(P/M) = (0’36)·(0’16) **= 36/625 = 0’0576**.

b)

Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

Me piden **p(estar en el paro) = p(P)**

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Me piden **p(P) =** p(V).p(P/V) + p(M).p(P/M) = (0’64)·(0’12) + (0’36)·(0’16) **= 84/625 = 0’1344**.

c)

Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Me piden **p(estar en el paro sabiendo que es mujer) = p(M/P)**.

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(M/P) =} \frac{p(M \cap P)}{p(P)} = \frac{p(M)\cdot p(P/M)}{0'45} = \frac{(0'36)\cdot(0'16)}{0'1344} \mathbf{= 3/7 \cong 0'42857}.$$

10.- De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

(a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales).

(b) (1 punto) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

Solución

(a)

¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales).

Recordamos que si realizamos **n** veces (5) un experimento en el que podemos obtener éxito, F, con probabilidad **p** (p(F) = 1/5 = 0’2) y fracaso, F^C, con probabilidad **q** (q = 1 – p = 1 – 0’2 = 0’8), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n;p)**.

Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(5; p)** = **B(5; 0’2)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (5\ sobre\ k)\cdot 0'2^k\cdot 0'8^{(5-k)} = \binom{5}{k}\cdot 0'2^k\cdot 0'8^{(5-k)}}.$$

** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de “n”. En la calculadora “ n tecla **nCr** k “

En nuestro caso piden **p(X = 0) + p(X = 1) =** $\mathbf{\binom{5}{0}\cdot 0'2^0\cdot 0'8^{(5)} + \binom{5}{1}\cdot 0'2^1\cdot 0'8^{(4)} = 0'32768 +}$

$= \dfrac{5!}{0!\cdot 5!}$ **$\cdot 0'2^0 \cdot 0'8^{(5)} +$** $\dfrac{5!}{1!\cdot 4!}$ **$\cdot 0'2^1 \cdot 0'8^{(4)} = 0'32768 + 0'4096 = 0'73728.$**

(b)

¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico. Calculamos p(X = 0) y p(X = 5).

Tenemos **$p(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0'2^0 \cdot 0'8^{(5)} = (0'8)^5 = 0'32768.$** **$p(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0'2^5 \cdot 0'8^{(0)} = (0'8)^5 = 0'00032.$**

Luego es más probable que ninguno abandone los estudios.